

Übung

Kai Welke

- Euler, Roll-Pitch-Yaw, Quaternionen
- D.-H. Konvention
- Vorwärtskinematik
- Inverse Kinematik

Euler vs. Roll-Pitch-Yaw

Euler

- Interpretation von links nach rechts
- Jede Drehung bezieht sich auf das neue Koordinatensystem
- Drehung um jeweils veränderte Achsen

Roll-Pitch-Yaw

- Interpretation von rechts nach links
- Jede Drehung bezieht sich auf das BKS
- Drehung jeweils um unveränderte Achsen

1.1 ZX'Z" Eulerwinkel

$$\begin{aligned}
 R &= R_z(\alpha) R_{x'}(\beta) R_{z''}(\gamma) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\gamma) - \sin(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma) & -\cos(\alpha)\sin(\gamma) - \sin(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) & \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\gamma) + \cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma) & -\sin(\alpha)\sin(\gamma) + \cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\beta)\sin(\gamma) & \sin(\beta)\cos(\gamma) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

1.2 Roll-Pitch-Yaw Winkel (XYZ Konvention)

$$\begin{aligned}
 R &= R_z(\gamma)R_y(\beta)R_x(\alpha) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) & -\cos(\gamma)\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha)\sin(\gamma) & \sin(\gamma)\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha)\cos(\gamma) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\gamma)\cos(\alpha) + \sin(\beta)\sin(\alpha)\sin(\gamma) & -\sin(\gamma)\cos(\alpha) + \sin(\beta)\sin(\alpha)\cos(\gamma) \\ -\sin(\beta) & \sin(\gamma)\cos(\beta) & \cos(\gamma)\cos(\beta) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Rotation mit Quaternionen

- Gegeben 3-dim. Einheitsvektor $\mathbf{u}$, Winkel θ
dann repräsentiert das Quaternion

$$q = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \vec{u} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

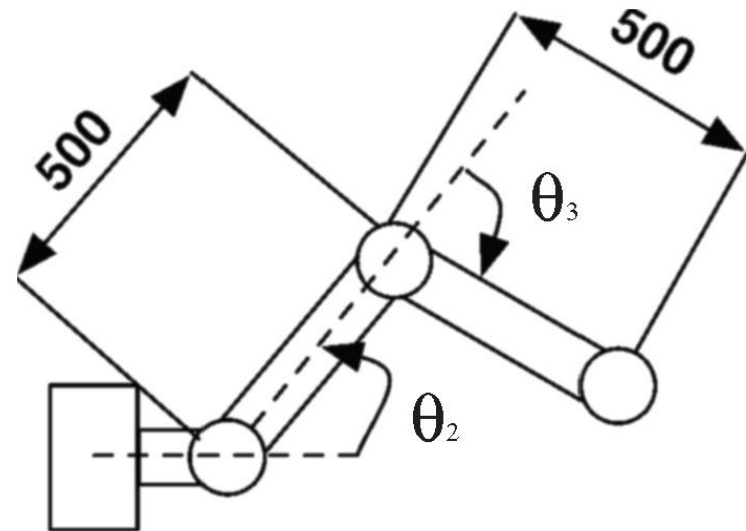
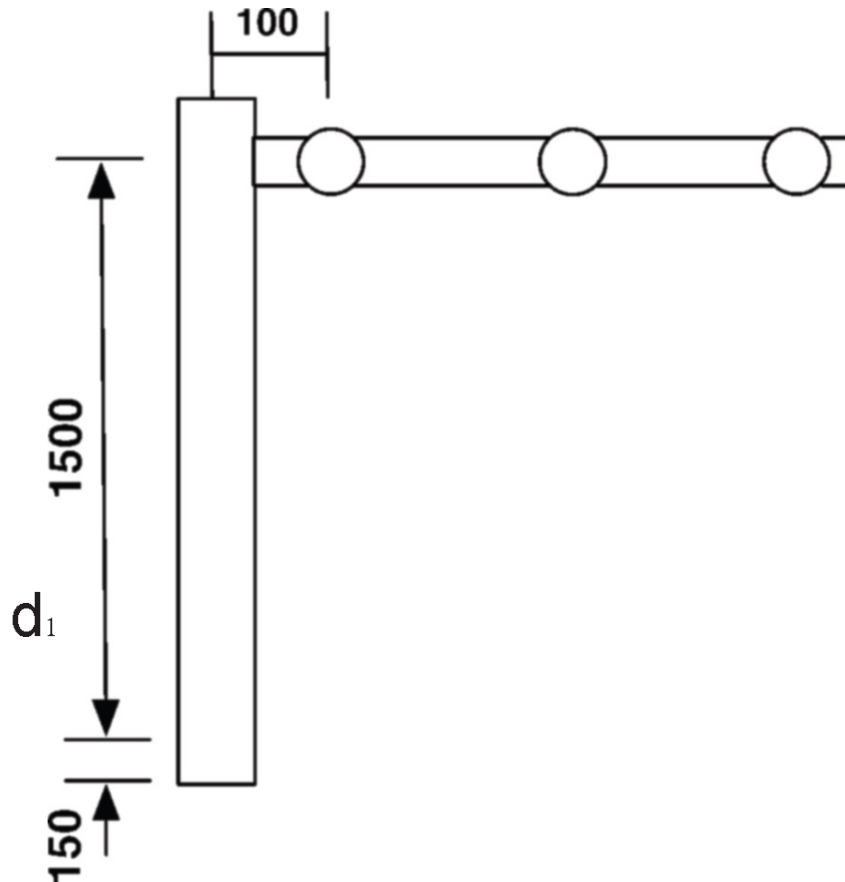
eine Rotation um mit Rotationsachse $\mathbf{u}$ mit dem Winkel θ .

1.3 Quaternionen, Allgemeine Rotationsmatrix

Allgemeine Formulierung der Rotationsmatrix **R** um einen Einheitsvektor **v** mit dem Winkel **α** :

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) + v_1^2 (1 - \cos(\alpha)) & v_1 v_2 (1 - \cos(\alpha)) - v_3 \sin(\alpha) & v_1 v_3 (1 - \cos(\alpha)) + v_2 \sin(\alpha) \\ v_2 v_1 (1 - \cos(\alpha)) + v_3 \sin(\alpha) & \cos(\alpha) + v_2^2 (1 - \cos(\alpha)) & v_2 v_3 (1 - \cos(\alpha)) - v_1 \sin(\alpha) \\ v_3 v_1 (1 - \cos(\alpha)) - v_2 \sin(\alpha) & v_3 v_2 (1 - \cos(\alpha)) + v_1 \sin(\alpha) & \cos(\alpha) + v_3^2 (1 - \cos(\alpha)) \end{pmatrix}$$

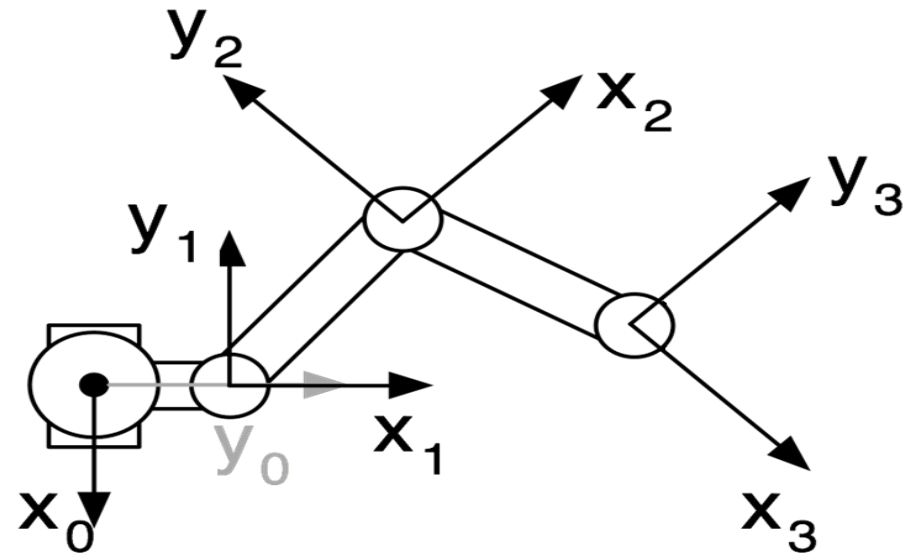
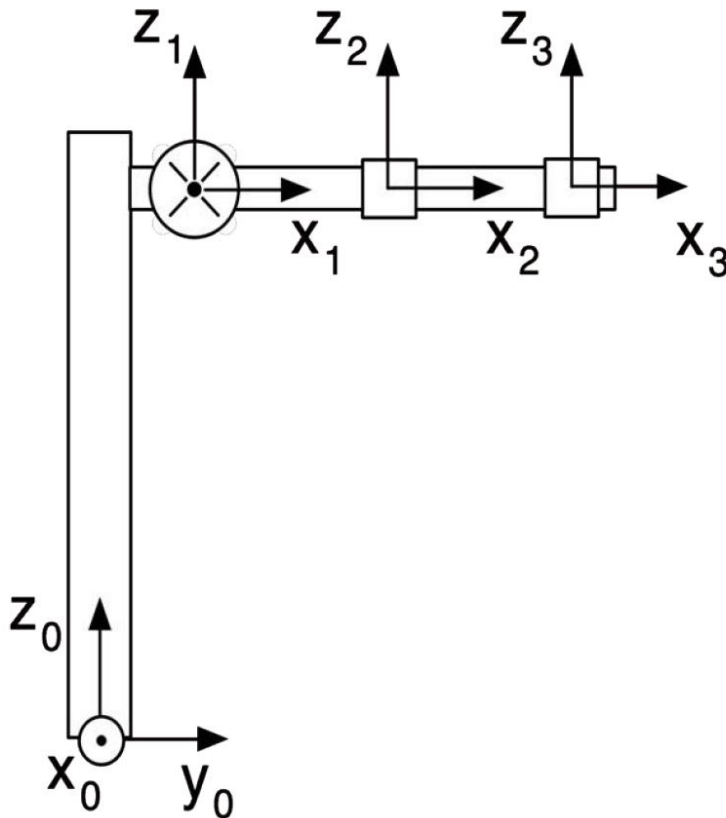
- Euler, Roll-Pitch-Yaw, Quaternionen
- D.-H. Konvention
- Vorwärtskinematik
- Differentielle Inverse Kinematik



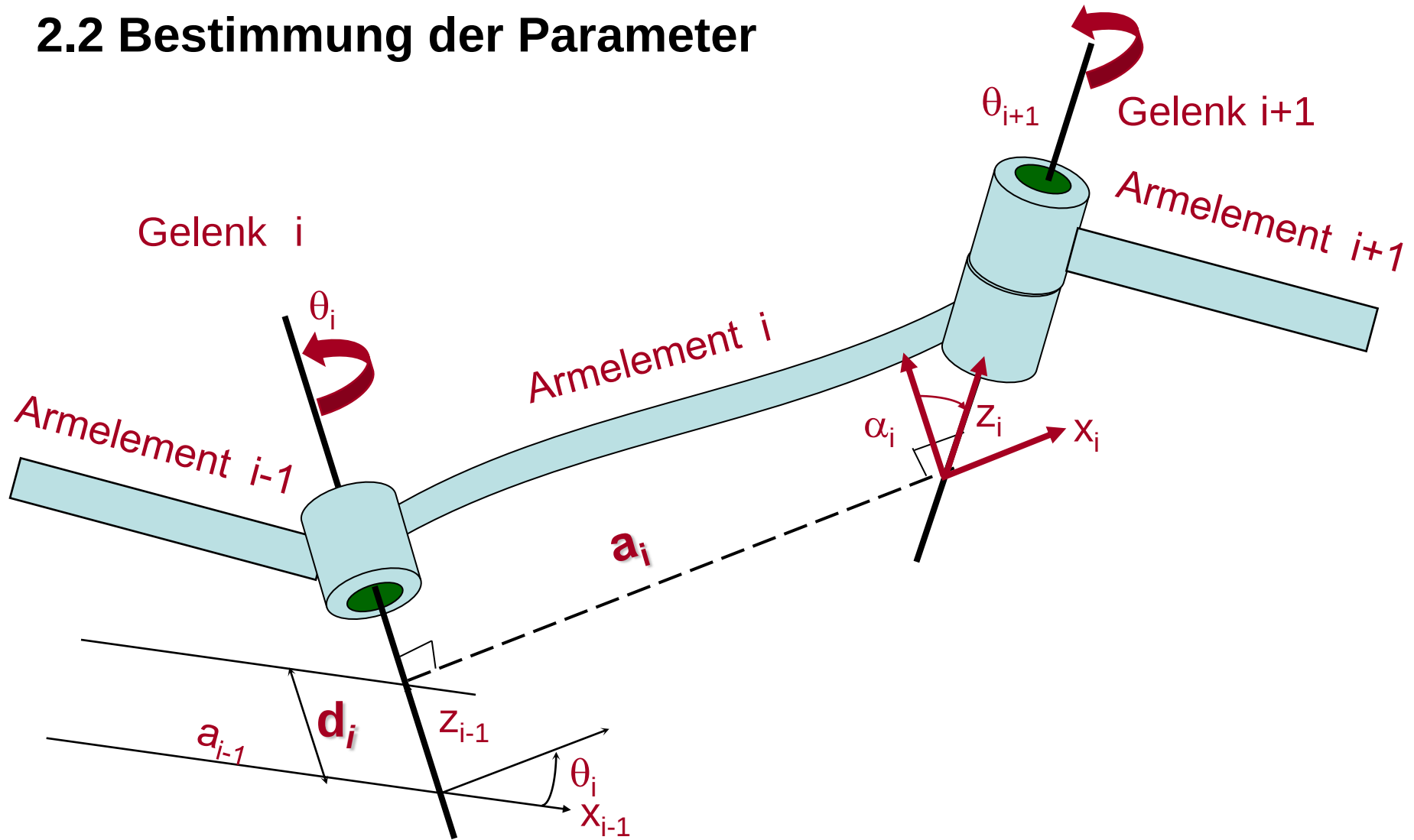
2.1 Bestimmung der Koordinatensysteme

1. Skizze des Manipulators
2. Identifiziere und nummeriere die Gelenke (Basis=1, Letztes Gelenk = n)
3. Zeichne die Achsen $\mathbf{z}_{i-1}$ für jedes Gelenk i
4. Bestimme die Parameter $\mathbf{a}_i$ zwischen $\mathbf{z}_{i-1}$ und $\mathbf{z}_i$
5. Zeichne die x_i -Achsen

2.1 Bestimmung der Koordinatensysteme



2.2 Bestimmung der Parameter



2.2 Bestimmung der Parameter

Parameter	Symbol	Rotationsgelenk	Schubgelenk
Gelenkwinkel	θ	variabel	invariant
Gelenkabstand	d	invariant	variabel
Länge Armelement	a	invariant	invariant
Verwindung	α	invariant	invariant

2.2 Bestimmung der Parameter

	d	θ	a	α
Gelenk 1	$150 \leq d_1 \leq 1650$	90°	100	0°
Gelenk 2	$d_2 = 0$	θ_2	500	0°
Gelenk 3	$d_3 = 0$	θ_3	500	0°

Transformation von OKS_{i-1} auf OKS_i

1. eine Rotation θ_i um die $\mathbf{z}_{i-1}$ -Achse
damit die $\mathbf{x}_{i-1}$ -Achse parallel zu der
 $\mathbf{x}_i$ -Achse liegt

$$R_{z_{i-1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. eine Translation $\mathbf{d}_i$ entlang der $\mathbf{z}_{i-1}$ -
Achse zu dem Punkt, wo sich $\mathbf{z}_{i-1}$
und $\mathbf{x}_i$ schneiden

$$T_{z_{i-1}}(d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. eine Translation $\mathbf{a}_i$ entlang der $\mathbf{x}_i$ -Achse, um die Ursprünge der Koordinatensysteme in Deckung zu bringen

$$T_{x_i}(a_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. eine Rotation α_i um die $\mathbf{x}_i$ -Achse, um die $\mathbf{z}_{i-1}$ -Achse in die $\mathbf{z}_i$ -Achse zu überführen

$$R_{x_i}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In Matrizenschreibweise lautet die Denavit-Hartenberg (DH) Transformation von Armelement $i-1$ auf i :

$$A_{i-1,i} = R_{z_{i-1}}(\theta_i) \cdot T_{z_{i-1}}(d_i) \cdot T_{x_i}(a_i) \cdot R_{x_i}(\alpha_i)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4 Gesamttransformation

$$A_{0,3} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta_2 + \theta_3) & -\cos(\theta_2 + \theta_3) & 0 & -500\sin(\theta_2 + \theta_3) - 500\sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_2 + \theta_3) & 0 & 500\cos(\theta_2 + \theta_3) + 100 + 500\cos(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Euler, Roll-Pitch-Yaw, Quaternionen
- D.-H. Konvention
- Vorwärtskinematik
- Differentielle Inverse Kinematik

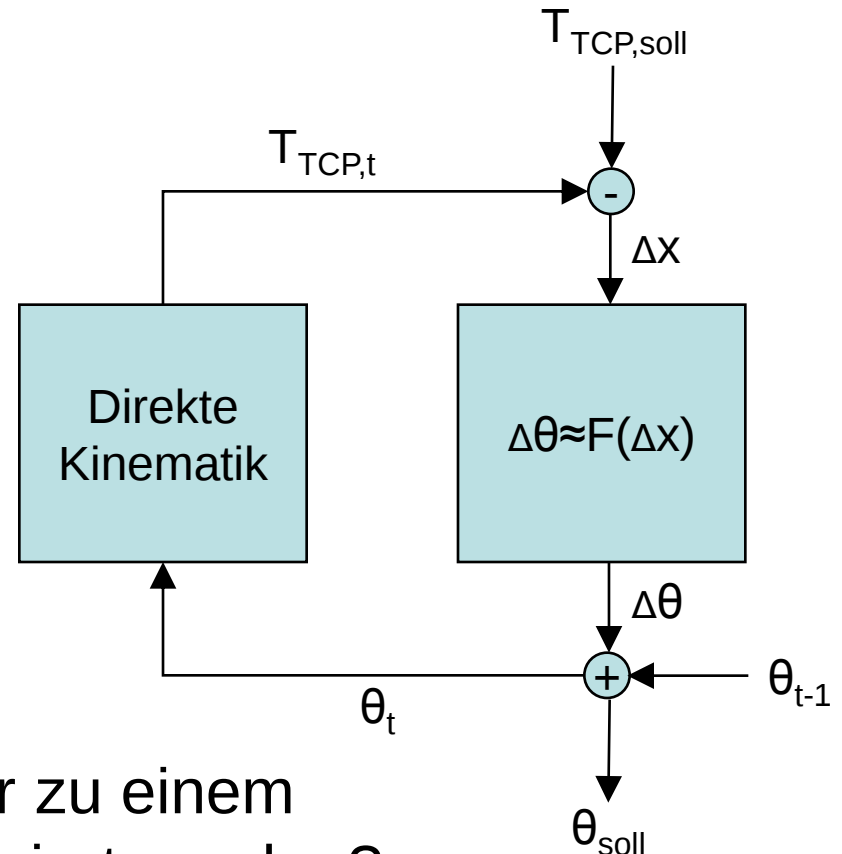
3. Vorwärtskinematik

$$T_{TCP} = A_{0,3} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta_2 + \theta_3) & -\cos(\theta_2 + \theta_3) & 0 & -500\sin(\theta_2 + \theta_3) - 500\sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_2 + \theta_3) & 0 & 500\cos(\theta_2 + \theta_3) + 100 + 500\cos(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Euler, Roll-Pitch-Yaw, Quaternionen
- D.-H. Konvention
- Vorwärtskinematik
- Differentielle Inverse Kinematik

Es wird iterativ versucht, eine Lösung für den Gelenkwinkelvektor θ zu finden.

- Berechne $T_{TCP,t}$ in Iteration t aus Gelenkwinkelstellungen θ_t (θ_0 =Stellung des Roboters)
- Berechne Fehler Δx aus Sollposition des TCP und berechneter Position
- Benutze approximiertes inverses kinematisches Modell F um Gelenkwinkelfehler $\Delta\theta$ zu berechnen
- Berechne $\theta_{t+1} = \theta_t + \Delta\theta$
- Fahre mit Iteration $t+1$ fort



Wie kann der Gelenkwinkelfehler zu einem Fehler in der TCP-Lage approximiert werden?

Ansatz

1. Vorwärtskinematik als Funktion:

$$x(t) = f(\theta(t))$$

$x(t)$: Beschreibungsvektor der TCP Lage

$\theta(t)$: Gelenkwinkelstellungen

2. Ableitung nach der Zeit:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = J(\theta) \dot{\theta}(t)$$

$\dot{x}(t)$: Geschwindigkeiten des TCP

$\dot{\theta}(t)$: Winkelgeschwindigkeiten der Gelenke

$J(\theta)$: Jacobi Matrix

3. Übergang zum Differenzenquotienten:

$$\Delta x \approx J(\theta) \Delta \theta$$

Δx : Fehler in der TCP Lage

$\Delta \theta$: Fehler im Gelenkwinkel

4. Umkehrung:

$$\Delta \theta \approx J^{-1}(\theta) \Delta x$$

Kinematisches Modell

$$A_{0,3} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta_2 + \theta_3) & -\cos(\theta_2 + \theta_3) & 0 & -500\sin(\theta_2 + \theta_3) - 500\sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_2 + \theta_3) & 0 & 500\cos(\theta_2 + \theta_3) + 100 + 500\cos(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -500\cos(\theta_2 + \theta_3) - 500\cos(\theta_2) & -500\cos(\theta_2 + \theta_3) \\ 0 & -500\sin(\theta_2 + \theta_3) - 500\sin(\theta_2) & -500\sin(\theta_2 + \theta_3) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{500} \frac{\sin(\theta_2 + \theta_3)}{\sin(\theta_3)} & \frac{1}{500} \frac{\cos(\theta_2 + \theta_3)}{\sin(\theta_3)} & 0 \\ \frac{1}{500} \frac{\sin(\theta_2 + \theta_3) + \sin(\theta_2)}{\sin(\theta_3)} & \frac{1}{500} \frac{-\cos(\theta_2 + \theta_3) - \cos(\theta_2)}{\sin(\theta_3)} & 0 \end{pmatrix}$$